87

(1) $p>0$，$q>0$，$p+q=1$ のとき，関数 $f(x)=x^2$ について不等式

$f(px_1+qx_2)\leq pf(x_1)+qf(x_2)$ が成り立つことを示せ。

(2) $a>0$，$b>0$，$a+b=1$ のとき，(1)を用いて不等式

$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geq\dfrac{25}{2}$ が成り立つことを示せ。

（早稲田大学）

解

(1)

$$\begin{aligned}pf(x_1)+qf(x_2)-f(px_1+qx_2)&=px_1{}^2+qx_2{}^2-(px_1+qx_2)^2\\&=p(1-p)x_1{}^2+q(1-q)x_2{}^2-2pqx_1x_2\\&=pqx_1{}^2+qpx_2{}^2-2pqx_1x_2\\&=pq(x_1-x_2)^2\geq 0\end{aligned}$$

(2)

(1)において，$p=q=\dfrac{1}{2}$，$x_1=a+\dfrac{1}{a}$，$x_2=b+\dfrac{1}{b}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2&\geq\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2\\&=\frac{1}{4}\left\{(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}^2\\&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\geq\dfrac{2}{a+b}=2$（等号成立は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき）

$\therefore\dfrac{1}{ab}\geq 4$（等号成立は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき）

$\therefore\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)^2\geq(1+4)^2=25$（等号成立は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき）

よって，$\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geq\dfrac{25}{4}$

$\therefore\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geq\dfrac{25}{2}$　（等号成立は $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき）